SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. DORE

PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'OPERATORE DI LAPLACE IN UN SETTORE

21 GENNAIO 1988

1. INTRODUZIONE

Lo studio di problemi alla frontiera per operatori ellittici in domini del piano con punti angolosi, per esempio in poligoni, richiede come premessa lo studio di un analogo problema in un angolo del piano.

Tale problema è stato studiato da numerosi autori, anche più in generale nel caso di coni di R^n. In ambito L^2 risultati di esistenza, unicità e regolarità sono stati ottenuti, tra gli altri, da Avantaggiati e Troisi [AT], Kondrat'ev [K] e Bove [B]; in ambito L^p ricordiamo Merigot [M], Fabes, Jodeit, Lewis [FJL] e il libro di Grisvard [G1].

Riferimenti bibliografici più estesi si trovano in [AT] e in [G1].

Grisvard [G2] ha inoltre studiato il comportamento vicino al vertice dell'angolo Σ delle soluzioni del problema

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Sigma \\ u_{|\partial\Sigma} = 0 \end{cases}$$

in funzione del comportamento del dato f.

In tale lavoro, mediante passaggio in coordinate polari e riduzione al primo ordine, il problema dato è ricondotto a una equazione differenziale ordinaria singolare astratta. Sono così ottenuti risultati in spazi L^p con peso, ma nel caso $p \neq 2$ tali risultati sono solo parziali.

In questo seminario esporrò alcuni risultati di esistenza e di unicità in opportuni spazi L^p con peso, oltre a una formula di rappresentazione delle soluzioni, per il problema (1). Tali risultati, ottenuti in collaborazione con A. Venni, sono ricavati riconducendosi a una equazione astratta come suggerito nel citato lavoro di Grisvard. Lo studio di tale equazione è compiuto utilizzando vari risultati miei e di Venni [DV 1-3]; nel caso particolare $p = 2$ questo studio può essere fatto anche con l'uso della trasformata di Mellin, come nel lavoro di Lewis e Parenti [LP].

2. POSIZIONE DEL PROBLEMA E RIDUZIONE A UNA EQUAZIONE ASTRATTA

Sia $\omega \in]0,2\pi]$. Poniamo

$$\Sigma = \{(r \cos\theta,\ r \text{ sen } \theta) : r \in R^+,\ \theta \in]0,\omega[\}$$

$$\Gamma = \{(r \cos\theta,\ r \text{ sen } \theta) : r \in R^+,\ \theta = 0 \text{ o } \theta = \omega\}.$$

Consideriamo il problema:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y) & (x,y) \in \Sigma. \\ u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Gamma \end{cases}$$

dove $f:\Sigma \to C$ misurabile è tale che per fissati $p \in]1,+\infty[$, $\alpha \in R$

$$\int_\Sigma ((x^2+y^2)^{\alpha/2}\ |f(x,y)|)^p\ dx\ dy < +\infty$$

Cerchiamo una soluzione $u:\Sigma \to C$ la cui restrizione a ogni sottoinsieme aperto di Σ, limitato e che non abbia 0 come punto di accumulazione, sia $W^{2,p}$ ed inoltre che soddisfi opportune condizioni in 0 e all'infinito.

Passando a coordinate polari, dopo avere moltiplicato l'equazione per r^2, il problema diventa:

$$\begin{cases} r^2 D_{rr} v(r,\theta) + r D_r v(r,\theta) + D_{\theta\theta} v(r,\theta) = r^2 f(r \cos\theta,\ r \text{ sen}\theta) \\ v(r,0) = v(r,\omega) = 0 \qquad\qquad r \in R^+ \end{cases}$$

da cui, ponendo $w_1(r,\theta) = r D_r v(r,\theta) \quad w_2\ (r,\theta) = D_\theta v(r,\theta)$

$$
(3)\qquad\begin{cases} rD_r w_1(r,\theta)+D_\theta w_2(r,\theta) = r^2 f(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ rD_r w_2(r,\theta)-D_\theta w_1(r,\theta) = 0 \\ w_1(r,0) = w_1(r,\omega) = 0 \end{cases}
$$

Perciò, se indichiamo con A l'operatore in $(L^p(]0,\omega[))^2$ con dominio

$$\mathscr{D}(A) = \{\phi\in (W^{1,p}(]0,\omega[))^2 : \phi_1(0) = \phi_1(\omega) = 0\}$$

definito ponendo $A(\phi_1,\phi_2) = (-\phi_2',\phi_1')$, il problema (3) diventa

$$(4)\qquad rw'(r) = Aw(r) + g(r)\qquad r\in R^+$$

dove $g(r)(\theta) = (r^2 f(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta),0)$.

E' evidente che dal fatto che

$$(x,y) \to (x^2+y^2)^{\alpha/2} f(x,y) \text{ è in } L^p(\Sigma)$$

segue immediatamente che $r \to r^{\alpha-2+1/p} g(r)$ è in $L^p(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2)$. Studieremo perciò la equazione (4) in $L^{p,\beta}(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2)$ spazio delle funzioni $w : R^+ \to (L^p(]0,\omega[))^2$ misurabili e tali che $\int_{R+} (r^\beta\|w(r)\|)^p\, dr < +\infty$, dotato della norma naturale.

3. L'EQUAZIONE ASTRATTA

Studiamo ora la equazione (4) nello spazio $L^{p,\beta}(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2) = X_{p,\beta}$ $(p\in]1,+\infty[,\ \beta\in R)$. Definiamo i seguenti operatori:

$G : \mathscr{D}(G) \to X_{p,\beta}$

con $\mathscr{D}(G) = \{w \in X_{p,\beta} \ : \ r \to r\, w'(r) \in X_{p,\beta}\}$

e $Gw(r) = -r\, w'(r)$

$Q : \mathscr{D}(Q) \to X_{p,\beta}$

con $\mathscr{D}(Q) = \{w \in X_{p,\beta} \ : \ w(r) \in \mathscr{D}(A)$ q.d su R^+ e $A \circ w \in X_{p,\beta}\}$

L'equazione (4) può essere allora scritta

(5) $\qquad Qw + Gw = -g$

Si tratta a questo punto di invertire l'operatore Q+G nello spazio $X_{p,\beta}$.

Per fare questo studieremo anzitutto il risolvente degli operatori Q e G.

Per quello che riguarda G si ha:

<u>Teorema 1</u>. $\sigma(G) = \{\lambda \in C \ : \ \mathrm{Re}\,\lambda = \frac{1}{p} + \beta\}$,

se $\mathrm{Re}\lambda > \frac{1}{p} + \beta \quad R(\lambda,G)f(t) = t^{-\lambda}\int_0^t s^{\lambda-1}f(s)ds$

se $\mathrm{Re}\lambda < \frac{1}{p} + \beta \quad R(\lambda,G)f(t) = -t^{-\lambda}\int_t^\infty s^{\lambda-1}f(s)ds$

e inoltre $\|R(\lambda,G)\| = |\mathrm{Re}\,\lambda - \frac{1}{p} - \beta|^{-1}$

Nel caso di spazi senza peso ($\beta = 0$) la disuguaglianza di Hardy-Littlewood garantisce che l'operatore che a f associa

$t^{-\lambda}\int_0^t s^{\lambda-1}f(s)ds$ se $Re\lambda > \frac{1}{p}$ e $-t^{-\lambda}\int_t^{\infty} s^{\lambda-1}\, f(s)\, ds$ se $Re\lambda < \frac{1}{p}$ è continua da $X_{p,o}$ a $X_{p,o}$ e inoltre si verifica immediatamente che è l'inversa di λ-G (vedi [DV 1] teorema 3.3).

Nel caso $\beta \neq 0$ l'operatore S_β di moltiplicazione per la funzione r^β è una isometria di $X_{p,\beta}$ su $X_{p,o}$ e inoltre $(G_o+\beta)S_\beta = S_\beta G_\beta$ (G_o è l'operatore in $S_{p,o}$, G_β l'operatore in $S_{p,\beta}$), perciò lo spettro di G_β è spostato di β rispetto allo spettro di G_o e $S_\beta(\lambda-G_\beta)^{-1} = (\lambda-\beta-G_o)^{-1}S_\beta$ da cui segue il teorema.

Le proprietà spettrali di Q sono invece conseguenza delle proprietà spettrali dell'operatore A in $(L^p(]0,\omega[))^2$. Si ha:

<u>Teorema 2.</u> $\delta(A) = \{k\frac{\pi}{\omega} : k\in Z\}$ inoltre $\forall k\in Z$ $k\pi/\omega$ è un polo del risolvente con residuo l'operatore $P_k \in \mathscr{L}((L^p(]0,\omega[))^2)$ tale che

$$P_k(u,v)\,(\theta) =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (\text{sen}\,(\frac{k\pi}{\omega}\sigma)u(\sigma) + \cos(\frac{k\pi}{\omega}\,\sigma)v(\sigma))d\sigma \quad (\text{sen}(\frac{k\pi}{\omega}\theta),\ \cos(\frac{k\pi}{\omega}\,\theta))$$

ed è autovalore con autospazio generato dal vettore $(\text{sen}\,(\frac{k\pi}{\omega}\,\theta),\ \cos(\frac{k\pi}{\omega}\,\theta))$. Infine $\forall\varepsilon\in R^+$ $\exists C_\varepsilon\in R^+$ tale che se $\lambda\in\rho(A)$ e $\text{dist}(\lambda,\sigma(A)) > \varepsilon$ allora

$$\|R(\lambda,A)\| \le C_\varepsilon(\text{dist}(\lambda,\sigma(A)))^{-1}$$

La dimostrazione di questi fatti si ottiene facilmente scrivendo $R(\lambda,A)$, che risulta essere un operatore integrale (vedi [DV3] § 3).

Lo spettro di Q coincide con lo spettro di A e $\|R(\lambda,Q)\| \le \|R(\lambda,A)\|$. Le stime sul risolvente di Q e di G, tenuto presente che Q e G hanno dominio den

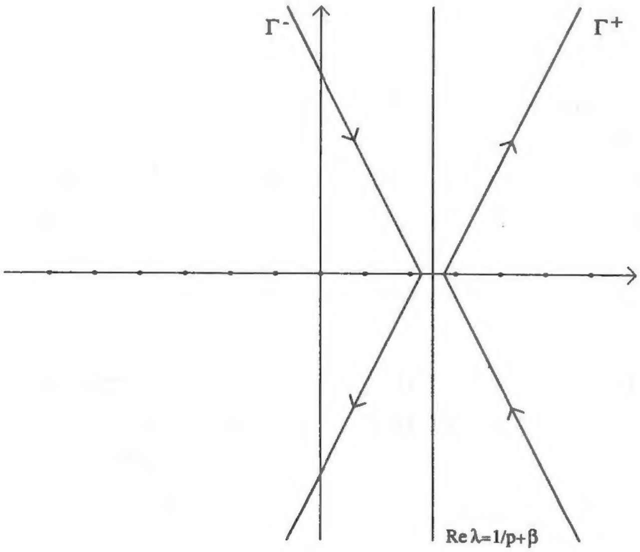
so in $X_{p,\beta}$ e hanno risolventi che commutano, consentono nei casi in cui $\sigma(G)\cap\sigma(-Q) = \emptyset$, di scrivere un "inverso" dell'operatore G+Q tramite un integrale di Dunford.

Si ha perciò (vedi [DV1] corollario 4.4):

<u>Teorema 3.</u> Supponiamo $(\frac{1}{p} + \beta)\ \frac{\omega}{\pi} \notin Z$, allora l'operatore G+Q è chiudibile, $\overline{G+Q}$ è invertibile e

$$(\overline{G + Q})^{-1} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda,G)R(-\lambda,Q)d\lambda$$

dove $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, Γ_+ è una curva da $e^{-i\phi}\infty$ a $e^{i\phi}\infty (0<\phi< \frac{\pi}{2})$ contenuta nel semipiano $\{\lambda\in C : Re\lambda > \frac{1}{p} + \beta\}$ che lascia alla sua destra $\{k\pi/\omega : k\in Z,\ k\pi/\omega > \frac{1}{p} + \beta\}$ e Γ_- è una curva da $e^{i\psi}\infty$ a $e^{-i\psi}\infty$ $(\frac{\pi}{2} < \psi<\pi)$ contenuta nel semipiano $\{\lambda\in C : Re\lambda < \frac{1}{p} + \beta\}$ che lascia alla sua destra $\{k\pi/\omega : k\in Z , k\pi/\omega < \frac{1}{p} + \beta\}$.



Vista la decrescenza di $R(\lambda,G)$ e $R(\lambda,Q)$ si può inoltre provare che l'integrale scritto sopra può essere calcolato tramite i residui della funzione integranda nei punti del tipo $k\pi/\omega$.

Si ha quindi:

$$\overline{(Q + G)}^{-1} = - \sum_{k\in Z} R(k\pi/\omega,G)P_{-k}$$

D'altra parte si può dimostrare

Teorema 4. L'operatore $Q+G : \mathscr{D}(Q) \cap \mathscr{D}(G) \to X_{p,\beta}$ è chiuso.

Per dimostrare questo teorema è necessario decomporre lo spazio $X_{p,\beta}$ nella somma diretta di due sottospazi chiusi X_+ e X_- invarianti sia per Q che per G e provare che, indicate con $Q_{\pm}$ e $G_{\pm}$ le parti di Q e G in $X_{\pm}$, $Q_+ + G_+$ e $Q_- + G_-$ sono chiusi.

Consideriamo anzitutto l'operatore $B = i(A + \frac{1}{p} + \beta)$ in $(L^p(]0,\omega[))^2$. Tale operatore ha spettro disgiunto da R, $\forall\lambda\in R$ $\|R(\lambda,B)\| \le C(1+|\lambda|)^{-1}$. Si può inoltre provare, utilizzando il teorema di Marcinkiewicz sui moltiplicatori di serie di Fourier e il teorema di M. Riesz nella esistenza di un proiettore continuo di L^p su H^p, che le potenze immaginarie di B e di -B sono limitate (vedi [DV3] § 3).

Questo basta per provare che $(L^p(]0,\omega[))^2$ è decomponibile nella somma topologica di due sottospazi E_+ ed E_- tali che $\sigma(B|_{E_+}) = \sigma(B)\cap\{\lambda\in C: \mathrm{Im}\ \lambda>0\}$

$\sigma(B|_{E_-}) = \sigma(B)\cap\{\lambda\in C: \mathrm{Im}\ \lambda < 0\}$

([DV 3] cor. 2.7), perciò

$$\sigma(A_{|E_+}) = \{k\ \frac{\pi}{\omega} : k\in Z\}\cap]-\frac{1}{p} - \beta, +\infty[$$

$$\sigma(A_{|E_-}) = \{k\ \frac{\pi}{\omega} : k\in Z\}\cap]-\infty, -\frac{1}{p} - \beta[$$

e inoltre i risolventi di questi operatori decrescono come $|\lambda|^{-1}$ per $\lambda \to \pm\infty$.

Posto $X_+ = L^{p,\beta}(R^+,E_+)$, $X_- = L^{p,\beta}(R^+,E_-)$ G_+ e Q_+ (G_- e Q_-) le parti di G e Q in X_+ (in X_-), risulta che G_+ e G_- hanno le stesse proprietà spettrali di G, $Q_{\pm}$ ha le stesse proprietà di $A_{|E_{\pm}}$. Perciò

$$G_+ + Q_+ = (G_+ + -\frac{1}{p} -\beta+\varepsilon) + (Q_+ + \frac{1}{p} + \beta-\varepsilon)$$

è, per $\varepsilon \in R^+$ piccolo, somma di due operatori positivi, cioè operatori con risolvente contenente $]-\infty,0]$ e decrescenza ottimale dell'operatore risolvente su tale semiretta. Analogamente $G_- + Q_- = -((-G_- + \frac{1}{p} + \beta + \varepsilon) + (-Q_- - \frac{1}{p} - \beta - \varepsilon))$ è opposto della somma di due operatori positivi. Inoltre i risolventi di tali operatori commutano.

Infine si può provare che le potenze puramente immaginarie di $G_+ - \frac{1}{p} -\beta+\varepsilon$, $-G_- + \frac{1}{p} +\beta+\varepsilon$, $Q_+ + \frac{1}{p} +\beta-\varepsilon$ e $-Q_- - \frac{1}{p} -\beta-\varepsilon$ costituirono gruppi fortemente continui di operatori limitati con norma maggiorata da $C_\delta(1+|s|^2) \cdot e^{(\pi/2+\delta)|s|}$ i primi due e da $C_\delta(1+|s|)e^{\delta|s|}$ gli ultimi due (per ogni $\delta \in R^+$). La dimostrazione si basa su un teorema di moltiplicatori di tipo Mihlin per funzioni a valori vettoriali dovuta a Mc Connell ([MC] th. 1.1) nel caso degli operatori traslati di $-G_+$ e G_-; segue invece le linee della dimostrazione fatta per provare la decomponibilità dello spazio $X_{p,\beta}$ per gli altri due operatori.

Visto che lo spazio $L^p(R^+,(L^p(]o,\omega[))^2)$ è ζ-convesso (vedi [DV2] rem. 2.7) è allora possibile applicare il teorema 2.1 di [DV2] ottenendo che $G_+ + Q_+$ e $G_- + Q_-$ sono chiusi e quindi G+Q è chiuso.

I teoremi 3 e 4 ci forniscono immediatamente il seguente risultato di esistenza e unicità per l'equazione (4).

<u>Teorema 5.</u> Sia $(\frac{1}{p} + \beta) \frac{\omega}{\pi} \notin Z$.

Allora $\forall g \in L^{p,\beta}(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2)$ esiste una e una sola $w \in L^{p,\beta}(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2)$ con $rw' \in L^{p,\beta}(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2)$ e $D_\theta w \in L^{p,\beta}(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2)$ che soddisfi

$$rw'(r) + Aw(r) = g(r) \qquad r \in R^+$$

Inoltre si ha

$$w(r)(\theta) =$$

$$= \frac{1}{\omega} \sum_{\substack{k \in Z \\ k\frac{\pi}{\omega} < -\frac{1}{p} - \beta}} r^{k\frac{\pi}{\omega}} \int_0^r \int_0^\omega \rho^{-k\frac{\pi}{\omega}-1} (\operatorname{sen}(k\frac{\pi}{\omega}\sigma) g_1(\rho)(\sigma) + \cos(k\frac{\pi}{\omega}) g_2(\rho)(\sigma)) d\sigma d\rho \cdot$$

$$\cdot (\operatorname{sen}(k\frac{\pi}{\omega}\theta), \cos(k\frac{\pi}{\omega}\theta)) -$$

$$- \frac{1}{\omega} \sum_{\substack{k \in Z \\ k\frac{\pi}{\omega} > -\frac{1}{p} - \beta}} r^{k\frac{\pi}{\omega}} \int_r^\infty \int_0^\omega \rho^{-k\frac{\pi}{\omega}-1} (\operatorname{sen}(k\frac{\pi}{\omega}\sigma) g_2(\rho)(\sigma) + \cos(k\frac{\pi}{\omega}\sigma) g_2(\rho)(\sigma) \, d\sigma d\rho.$$

$$\cdot (\operatorname{sen}(k\frac{\pi}{\omega}\theta), \cos(k\frac{\pi}{\omega}\theta))$$

Osserviamo che questo teorema assicura la unicità nello spazio $L^{p,\beta}(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2)$ per p e β fissati; nel caso in cui

$$g \in L^{p,\beta}(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2) \cap L^{q,\gamma}(R^+,(L^q(]0,\omega[))^2)$$

la formula scritta sopra ci fornisce due soluzioni la cui differenza ê, se p. es. $\frac{1}{q} + \gamma > \frac{1}{p} + \beta$,

$$\frac{1}{\omega}\sum_{\substack{k\in Z\\ -\frac{1}{q}-\gamma<k\frac{\pi}{\omega}<-\frac{1}{p}-\beta}} r^{k\frac{\pi}{\omega}}\int_0^\infty\int_0^\omega \rho^{-k\frac{\pi}{\omega}-1}(\operatorname{sen}(k\tfrac{\pi}{\omega}\sigma)g_1(\rho)(\sigma)+\cos(k\tfrac{\pi}{\omega}\sigma)g_2(\rho)(\sigma))d\sigma d\rho$$

$$\cdot\ (\operatorname{sen}(k\tfrac{\pi}{\omega}\theta),\ \cos(k\tfrac{\pi}{\omega}\theta))$$

perciò la soluzione in $L^{p,\beta}(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2)$ coincide con quella in $L^{q,\gamma}(R^+;(L^q(]0,\omega[))^2)$ se e solo se per ogni $k\in Z$ tale che $k\pi/\omega\in]-\frac{1}{q}-\gamma,\ -\frac{1}{p}-\beta[$ risulta

$$\int_0^\infty\int_0^\omega \rho^{-k\frac{\pi}{\omega}-1}(\operatorname{sen}(k\tfrac{\pi}{\omega}\sigma)g_1(\rho)(\sigma)+\cos(k\tfrac{\pi}{\omega}\sigma)g_2(\rho)(\sigma))d\rho d\sigma=0$$

Ovviamente tale condizione è sempre verificata se $](-\frac{1}{q}-\gamma)\frac{\omega}{\pi},(-\frac{1}{p}-\beta)\frac{\omega}{\pi}[$ non contiene numeri interi.

Esaminiamo ora il caso $(\frac{1}{p}+\beta)\frac{\omega}{\pi}=-\bar{k}\in Z$. Lo spazio $(L^p(]0,\omega[))^2$ può essere decomposto nella somma topologica del nucleo e del codominio di $P_{\bar{k}}$ (residuo di $R(\lambda,A)$ in $\bar{k}\frac{\pi}{\omega}$) e quindi l'equazione (4) può essere decomposta in due equazioni una in Ker $P_{\bar{k}}$ e l'altra in $\mathscr{C}(P_{\bar{k}})$. Visto che $\bar{k}\pi/\omega$ è nel risolvente della parte di A in Ker $P_{\bar{k}}$, in modo del tutto analogo alla dimostrazione del teorema 5 si ottiene esistenza e unicità in $L^{p,\beta}(R^+,\ker P_{\bar{k}})$.

L'altra equazione, visto che $\mathscr{C}(P_{\bar{k}})$ ha dimensione 1 si riduce a una equazione differenziale ordinaria in C:

$$rw'(r)+(\frac{1}{p}+\beta)\,w(r)=$$

$$=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega(\operatorname{sen}((-\frac{1}{p}-\beta)\sigma)g_1(r)(\sigma)+\cos((-\frac{1}{p}-\beta)\sigma)g_2(r)(\sigma))d\sigma$$

Indicata con ϕ la funzione a secondo membro, questa equazione ha soluzione $w\in L^{p,\beta}(R^+,C)$ se e solo se la funzione $\tau \to e^{\tau(1/p+\beta)}\phi(e^\tau)$ è derivata di una funzione in $W^{1,p}(R,C)$ e in tal caso

$$w(r) = r^{-\frac{1}{p}-\beta} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^r \rho^{\frac{1}{p}+\beta-1}\phi(\rho)d\rho =$$

$$= -r^{-\frac{1}{p}-\beta} \lim_{\varepsilon\to+\infty} \int_r^\varepsilon \rho^{\frac{1}{p}+\beta-1} \phi(\rho)d\rho.$$

4. IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'EQUAZIONE $\Delta u = f$

Vediamo ora come i risultati ottenuti per l'equazione (4) si traducono per il problema (2).

Anzitutto data $f\in L^{p,\alpha}(\Sigma)$, spazio delle funzioni da Σ a C misurabili e tali che $\int_\Sigma ((x^2+y^2)^{\alpha/2}|f(x,y)|)^p dxdy < +\infty$, sia w soluzione dell'equazione (4) con dato $g(r)(\theta) = (r^2 f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta),0)$.

Come già visto $g\in L^{p,\alpha-2+1/p}(R^+,(L^p(]o,\omega[))^2)$, quindi se $(\alpha + \frac{2}{p} -2)\frac{\omega}{\pi}\notin Z$ esiste ed è unica $w\in L^{p,\alpha-2+1/p}(R^+,(L^p(\ 0,W[))^2)$ soluzione di (4).

Per $(r,\theta)\in R^+x[0,\omega]$ poniamo

$$v(r,\theta) = \int_0^\theta w_2(r)(\sigma)d\sigma$$

E' chiaro che $\frac{\partial v}{\partial\theta}(r,\theta) = w_2(\theta)$ e, visto che $rw_2' = D_\theta w_1$ risulta $r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = w_1(\theta)$. Inoltre $\forall r\in R^+$ $v(r,0) = 0$. Visto che

$$r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\omega) = \int_0^\omega rw_2'(r)(\sigma)d\sigma = \int_0^\omega D_\theta w_1(r)(\sigma)d\sigma = w_1(r)(\omega)-w_1(r)(0)=0$$

$v(r,\omega)$ è costante. Si può provare che tale costante è 0 perché altrimenti w_2 non apparterrebbe a $L^{p,\beta}$. Perciò v è soluzione di

$$\begin{cases} r^2 D_{rr} v(r,\theta) + r D_r v(r,\theta) + D_{\theta\theta} v(r,\theta) = r^2 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta) \\ v(r,0) = v(r,\omega) = 0 \end{cases}$$

e quindi la funzione $u:\Sigma \to C$ definita ponendo $u(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\theta) = v(\rho,\theta)$ è soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Sigma \\ u = 0 & \text{in } \Gamma \end{cases}$$

Inoltre dal fatto che $w, rw', D_\theta w$ appartengono a $L^{p,\alpha-2+\frac{1}{r}}(R^+,(L^p(]0,\omega[))^2)$ segue immediatamente che $u \in L^{p,\alpha-2}(\Sigma)$, $u_x, y_y \in L^{p,\alpha-1}(\Sigma)$, $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} \in L^{p,\alpha}(\Sigma)$.
Si ha inoltre

$$u(r\,\text{sen}\theta, r\cos\theta) =$$

$$= \sum_{\substack{k\frac{\pi}{\omega} < -\alpha - \frac{2}{p} + 2 \\ k \neq 0}} \int_0^r \int_0^\omega \rho^{-k\frac{\pi}{\omega}+1} \,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{\omega}\sigma\right) f(\rho\cos\sigma, \rho\,\text{sen}\,\sigma)\, d\sigma\, d\rho \cdot \frac{r^{\frac{k\pi}{\omega}}\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{\omega}\theta\right)}{k\pi} -$$

$$- \sum_{\substack{k\frac{\pi}{\omega} > -\alpha - \frac{2}{p} + 2 \\ k \neq 0}} \int_r^\infty \int_0^\omega \rho^{-k\frac{\pi}{\omega}+1} \,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{\omega}\sigma\right) f(\rho\cos\sigma, \rho\,\text{sen}\sigma)\, d\sigma\, d\rho \cdot \frac{r^{\frac{k\pi}{\omega}}\,\text{sen}\left(k\frac{\pi}{\omega}\theta\right)}{k\pi}$$

Consideriamo ora il caso $(\alpha + \frac{2}{p} -2) \frac{\omega}{\pi} = -\bar{k} \in Z$. Si ha soluzione se e solo se la funzione $\tau \to e^{\tau(\alpha + 2/p-2)} \int_0^\omega sen((-\alpha - \frac{2}{p} + 2)\sigma) f(e^\tau \cos\sigma, e^\tau sen\sigma) d\sigma$ è derivata di una funzione $L^p(R,C)$. Nel caso $\alpha + \frac{2}{p} -2 = 0$ tale condizione è ovviamente verificata per ogni f, negli altri casi si può provare che tale condizione individua un sottospazio denso di $L^{p,\alpha}(\Sigma)$ diverso da $L^{p,\alpha}(\Sigma)$.

Perciò, indicato con $\overset{\circ}{W}{}^{2,p}_{\alpha}(\Sigma)$ lo spazio delle funzioni $L^{p,\alpha-2}(\Sigma)$ con derivate prime in $L^{p,\alpha-1}(\Sigma)$ e derivate seconde $L^{p,\alpha}(\Sigma)$, si ha

<u>Teorema 6.</u> Il problema (2) ha una e una sola soluzione in $\overset{\circ}{W}{}^{2,p}_{\alpha}(\Sigma)$ per ogni $f \in L^{p,\alpha}(\Sigma)$ se e solo se $(\alpha + \frac{2}{p} -2) \frac{\omega}{\pi} \notin Z/\{0\}$.

Nel caso $(\alpha + \frac{2}{p} -2) \frac{\omega}{\pi} \in Z/\{0\}$ il problema (2) ha una e una sola soluzione in $\overset{\circ}{W}{}^{2,p}_{\alpha}(\Sigma)$ per ogni $f \in L^{p,\alpha}(\Sigma)$ tale che la funzione

$$\tau \to e^{\tau}(\alpha+2/p-2) \int_0^\omega sen((-\alpha - \frac{2}{p} +2)\sigma) f(e^\tau \cos\sigma, e^\tau sen\sigma) d\sigma$$

è derivata di una funzione in $W^{1,p}$.

BIBLIOGRAFIA

[AT] A. AVANTAGGIATI, M. TROISI: Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo; I, II, III. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 95 (1973), 361-408; 97 (1973) 207-252; 99 (1974), 1-64.

[B] A. BOVE: Sul problema di Dirichlet in un cono per l'equazione $\Delta^m u = f$; Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 54 (1975), 231-244.

[DV1] G. DORE, A. VENNI: On a singular evolution equation in Banach spaces; J. Funct. Anal. 64 (1985), 227-250.

[DV2] G. DORE, A. VENNI: On the closedness of the sum of two closed operators; Math. Z. 196 (1987), 189-201.

[DV3] G. DORE, A. VENNI: Separation of two (possibly unbounded) components of the spectrum of a linear operator; preprint.

[FJL] E.B. FABES, M. JODEIT, J.E. LEWIS: Double layer potentials for domains with corners and edges; Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 95-114.

[G1] P. GRISVARD: Elliptic problems in nonsmooth domains; Pitman, Boston London Melbourne, 1985.

[G2] P. GRISVARD: An approach to the singular solutions of elliptic problems via the theory of differential equations in Banach spaces; in: Differential equations in Banach spaces (Proceedings, Bologna 1985). Lect. Notes. Math. 1223, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1986; pp. 130-155.

[K] V.A. KONDRAT'EV: Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points; Trans. Moscow Math. Soc. 16 (1967), 227-313.

[LP] J.E. LEWIS, C. PARENTI: Abstract singular parabolic equations; Comm. Partial Differential Equations 7 (1982), 279-324.

[MC] T.R. McCONNELL: On Fourier multiplier transformations of Banach-valued functions; Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 739-757.

[M] M. MERIGOT: Etude de problème $\Delta u = f$ dans un polygone plan. Inégualités à priori; Boll. Un. Mat. It. (4) 10 (1974), 577-597.